Vorlesung 5a

Zufallsvariable mit Dichten:

Transformationen, Exponentialverteilung, Normalverteilung

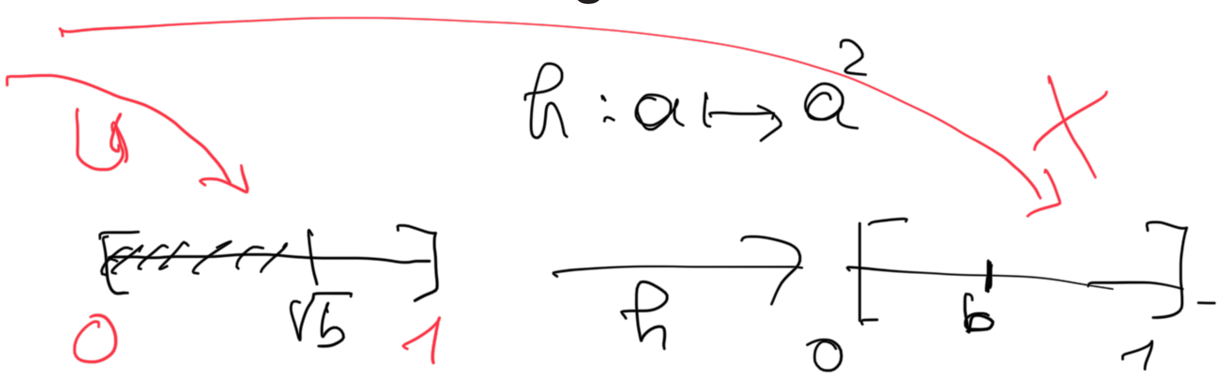
Teil 1

Transformationen

Drei Beispiele:

A. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$. Gefragt ist nach Verteilungsfunktion und Dichte von $X := U^2$.

$h : a \mapsto a^2$

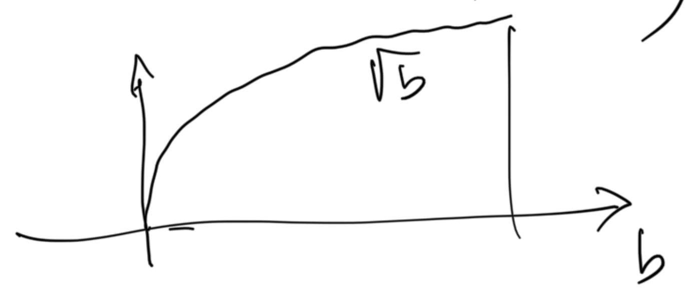


$0 \leq b \leq 1$

$F_X(b) = \mathbb{P}(X \leq b) = \mathbb{P}(U^2 \leq b) = \mathbb{P}(U \leq \sqrt{b}) = \sqrt{b}$

$F_X(b) = 0 \quad , \; b < 0$

$F_X(b) = 1 \quad , \; b > 1$



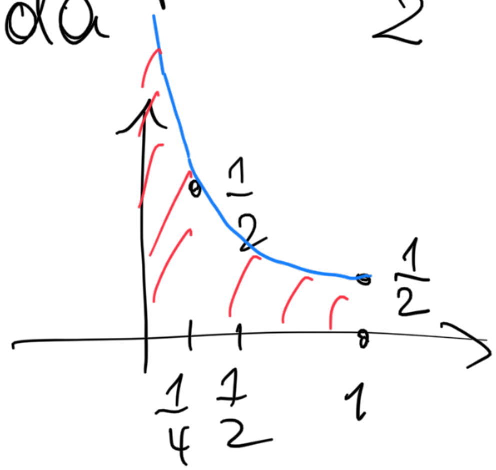
Drei Beispiele:

A. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$. Gefragt ist nach Verteilungsfunktion und Dichte von $X := U^2$.

$$F_X(b) = \mathbf{P}(X \le b) = \mathbf{P}(U \le \sqrt{b}) = \sqrt{b}, \quad 0 \le b \le 1.$$

$$f_X(a) = F_X'(a) = \frac{d}{da}\sqrt{a} = \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\lim_{a \to 0} f_X(a) = \infty$$



Drei Beispiele:

A. Sei U uniform verteilt auf $[0,1]$. Gefragt ist nach Verteilungsfunktion und Dichte von $X := U^2$.

$$F_X(b) = \mathbf{P}(X \le b) = \mathbf{P}(U \le \sqrt{b}) = \sqrt{b}, \quad 0 \le b \le 1.$$

$$\sqrt{b} \overset{!}{=} \int_0^b f(a)\, da, \quad 0 \le b \le 1.$$

$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{b}}, & 0 < b \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ ist Dichtefunktion von X.

B. Sei U uniform verteilt auf $[0,2]$. Gefragt ist nach Verteilungsfunktion und Dichte von $X := U^2$.

$$F_X(b) = \mathbb{P}(U^2 \le b) \qquad b \in [0,4]$$
$$= \mathbb{P}(U \le \sqrt{b}) = \frac{1}{2}\sqrt{b} \,,$$

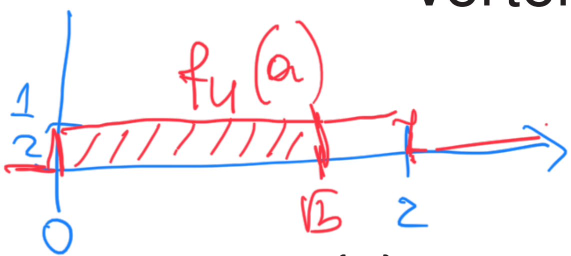
$$f_X(a) = F_X'(a) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} b^{-\frac{1}{2}}$$

B. Sei U uniform verteilt auf $[0, 2]$. Gefragt ist nach Verteilungsfunktion und Dichte von $X := U^2$.

X hat Wertebereich $[0, 4]$.

$$F_X(b) = \mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{b}) = \frac{1}{2}\sqrt{b}, \quad 0 < b \leq 4.$$

B. Sei U uniform verteilt auf $[0, 2]$. Gefragt ist nach Verteilungsfunktion und Dichte von $X := U^2$.



X hat Wertebereich $[0, 4]$.

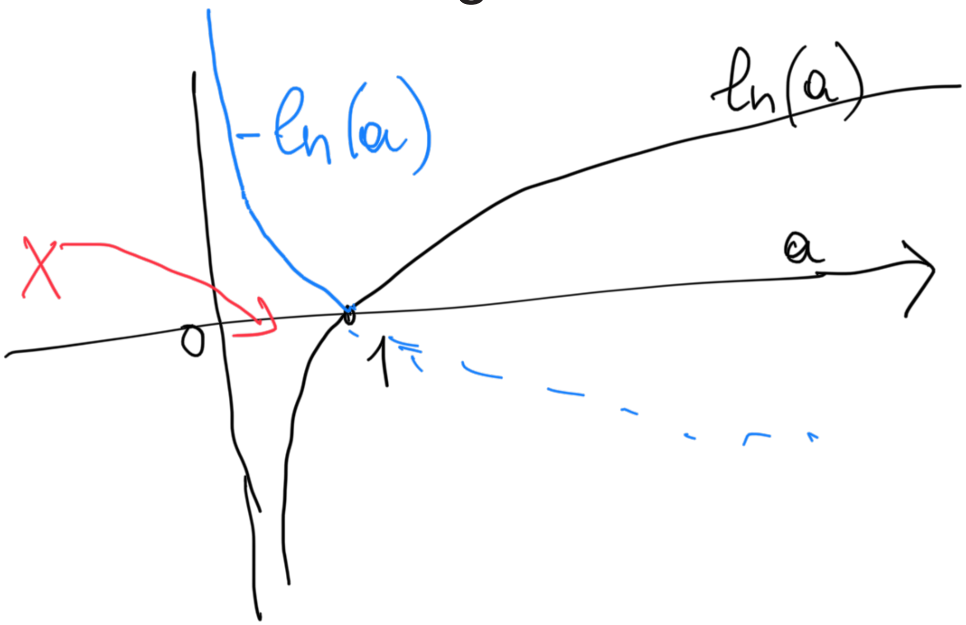
$$F_X(b) = \mathbf{P}(X \le b) = \mathbf{P}(U \le \sqrt{b}) = \frac{1}{2}\sqrt{b}, \quad 0 < b \le 4.$$

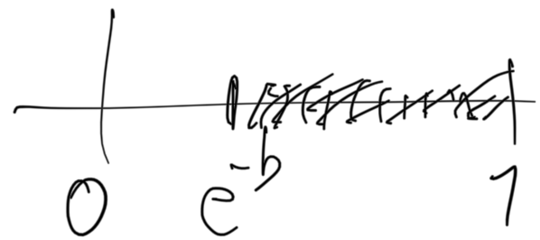
$$\frac{1}{2}\sqrt{b} \stackrel{!}{=} \int_0^b f(a)\,da, \quad 0 < b \le 4.$$

$$\boxed{f(b) = \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{b}}, & 0 \le b \le 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist Dichtefunktion von } X.}$$

C. Sei U uniform verteilt auf $[0,1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.





$$\mathbb{P}(X \leq b) = \mathbb{P}(-\ln U \leq b) = \mathbb{P}(\ln U \geq -b)$$

$$= \mathbb{P}(e^{\ln U} \geq e^{-b}) = \mathbb{P}(U \geq e^{-b})$$

$$= 1 - e^{-b} = F_X(b)$$

$f_X(a) = e^{-a}, \quad a \geq 0$

C. Sei U uniform verteilt auf $[0,1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \le b) &= \mathbf{P}(-\ln U \le b) = \mathbf{P}(\ln U \ge -b)\\ &= \mathbf{P}(U \ge e^{-b}) = \mathbf{P}(U \in [e^{-b}, 1])\\ &= 1 - e^{-b} \stackrel{!}{=} \int_0^b f(a)\,da, \quad b \ge 0.\end{aligned}$$

C. Sei U uniform verteilt auf $[0,1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \le b) &= \mathbf{P}(-\ln U \le b) = \mathbf{P}(\ln U \ge -b) \\ &= \mathbf{P}(U \ge e^{-b}) = \mathbf{P}(U \in [e^{-b}, 1]) \\ &= 1 - e^{-b} \overset{!}{=} \int_0^b f(a)\, da, \quad b \ge 0.\end{aligned}$$

$$f(b) = \begin{cases} e^{-b}, & b \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist Dichtefunktion von} X.$$

Zufallsvariable X mit der Eigenschaft

$$\mathbf{P}(X > b) = e^{-b}, \quad b \geq 0,$$

sind uns schon (implizit) begegnet

bei der Approximation der Verteilung von pT;

dabei war T Geom(p)-verteilt mit kleinem p.

Wir sprachen damals von der

Exponentialapproximation der geometrischen Verteilung,

siehe V4a.

Affin lineare Transformation:

X habe Verteilungsfunktion F_X.

Was ist dann die Verteilungsfunktion von $Y := \beta X + \gamma$?

Dabei sei $\beta > 0$.

Affin lineare Transformation:

X habe Verteilungsfunktion F_X.

Was ist dann die Verteilungsfunktion von $Y := \beta X + \gamma$?

Dabei sei $\beta > 0$.

$$F_Y(b)$$

$$= \mathbf{P}(Y \leq b) = \mathbf{P}(\beta X + \gamma \leq b)$$

$$= \mathbf{P}(\beta X \leq b - \gamma) = \mathbf{P}\left(X \leq \frac{b-\gamma}{\beta}\right)$$

$$= F_X\left(\frac{b-\gamma}{\beta}\right)$$

$$\boxed{F_X' = f_X}$$

$$\frac{d}{db} F_X\left(\frac{b-\gamma}{\beta}\right) = f_X\left(\frac{b-\gamma}{\beta}\right) \cdot \frac{1}{\beta}$$

X habe Dichte $f_X(a)da$.

Was ist dann die Dichte von $Y := \beta X + \gamma$?

Der Einfachheit halber nehmen wir an:

Die Dichtefunktion f_X ist stückweise stetig.

Dann ist in allen Stetigkeitspunkten

$$f_Y(b) = F'_Y(b) = F'_X\left(\frac{b-\gamma}{\beta}\right)\frac{1}{\beta}$$

X habe Dichte $f_X(a)da$.

Was ist dann die Dichte von $Y := \beta X + \gamma$?

Der Einfachheit halber nehmen wir an:

Die Dichtefunktion f_X ist stückweise stetig.

Dann ist in allen Stetigkeitspunkten

$$f_Y(b) = F_Y'(b) = F_X'\left(\frac{b-\gamma}{\beta}\right)\frac{1}{\beta}$$

Die Dichte von Y ist somit $f_Y(b)\ db = f_X'\left(\frac{b-\gamma}{\beta}\right)\frac{db}{\beta}$

Zum Merken: Schlag nach beim Urbild,

und vergiss den Streckungsfaktor nicht!